416. 特殊ナガロア体ノ構成ニ就テ(III)

淡中忠郎(東北大)

§3. 次ニ定理1ヲアーベル体ノ場合ニ証明スル、之ハ次ノ様ニズット一般ナ形ニ擴張スルコトガ出來ル。

(定理2)

k 基礎体

$\mathfrak{p}_x \quad (x=1,\cdots\cdots,s)$ k ノ Primstelle

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_2\times\cdots\cdots\times\mathfrak{g}_h \quad n_i=l_i^{m_i}$ ヲ不変数ニ持ツ有限次アーベル群($\mathfrak{g}_i$ ガ n_i 次ノ循回群)

μ_i k ガ $l_i^{\mu_i}$-te Einheitswurzeln ヲ含ム如キ最大数

ζ_i 1ノ原始 $l_i^{\nu_i}$ 乗根 コヽニ $\nu_i=Min(m_i,\mu_i)$

χ_{ix} $\alpha\neq 0$ ナル k ノ数ニ対スル Charakter

(値ハ $\mathfrak{g}_i$ ヲ動ク)

a) $\chi_{ix}(\alpha_1\alpha_2)=\chi_{ix}(\alpha_1)\cdot\chi_{ix}(\alpha_2)$

b) 次ノ性質ヲ持ツ $\mathfrak{p}_x$ ノ(最初ノ)べキ $\mathfrak{f}_{ix}$ ガアル、即チ

$$\chi_{ix}(\alpha_0)=1 \quad if \quad \alpha_0\equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_{ix}$$

c) $\prod_{x=1}^{s}\chi_{ix}(\zeta_i)=1 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,h)$

以上ノヤウナ假定ノ下ニ次ノ様ナ体 K が存在スル.

Kノ群ハ $\mathfrak{g}$ デ $K=Z_1,Z_2,\cdots\cdots Z_h$, Z_i ハ $\mathfrak{g}_i$ ヲ群ニ持ツ, 且ツ

$$\left(\frac{\alpha, Z_i|k}{\mathfrak{p}_x}\right) = \chi_{ix}(\alpha)$$

又，$\mathfrak{l}_i | \mathfrak{f}(Z_i/k)$, $\mathfrak{l}_i \neq \mathfrak{p}_x$ $(x=1,2,\cdots\cdots,s)$ ナラバ

1. $\mathfrak{l}_i$ ハ endlich
2. $\mathfrak{l}_i$ ハ Z_j $(j\neq i)$ デ完全ニ分解スル.
3. $\mathfrak{l}_i \nmid l_i$
4. $\zeta_i \underset{(n_i)}{\equiv} 1 \mod \mathfrak{l}_i$
5. $\mathfrak{l}_i$ ハ Z_i デ完全ニ分岐スル。」

コノ定理デ $s=0$ ノ時ガモトムル定理1ノ特別ノ場合デコノ形ニ述ベタノハ他ノ問題ヘノ應用ヲ考慮シタタメデアル。 $k=1$ ノ場合ハ本質的ニハ Grunwald ノ存在定理ト同ジデアルガ $k\geqq 2$ ノトキニハ附帯條件 1.—5. ノ為メニ少シ工夫ガ必要ニナッテ來ル。

ε k ノ基本単位 ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_r$ ト書クノヲ簡單ノタメ一字ニ書クコトトスル、以下同断)

$\mathfrak{r}_i$ l_i ノベキノ次数ヲ持ツ absolute Idealklasse ノ Basis (ソノ次数ヲ $l_i^{\lambda_i}=a_i$)

$(\rho_i) = \mathfrak{r}_i^{a_i}$

η_i primitiv $+1$ ノ $l_i^{\mu_i}$ 乗根

π_{ix} $\mathfrak{p}_x$ ニ対スル素数デ次ノ関係ヲ満足スルモノ

$$\mathfrak{p}_x = \prod \mathfrak{r}^{\nu_{ix}} \cdot \mathfrak{b}_{ix}^{n_i} (\pi_{ix})$$

(A)　$h=1$ ノ場合

Grunwald ノ論文ト同ジ記号ヲ用ヒテ $\chi_{\mathfrak{q}}$ ヲ mod $\mathfrak{q}$ ノ素ナ剰餘群ヲ $\mathfrak{q}_1$ 全体ニ寫ス homomorphe Abbildung トスルト

$$\mathfrak{q} \neq \mathfrak{l}_1$$

$$N\mathfrak{q} \equiv 1 \bmod \mathfrak{l}_1^{m_1} \quad (\text{之ハ } \chi_{\mathfrak{q}_1} \text{ ノ存在スル為メノ條件})$$

$$\chi_1(\eta_1) = \chi_1(\varepsilon) = \chi_1(\rho_1) = \chi_1(\pi_{1x}) = 1$$

ナル $\mathfrak{q}$ が存在スル. コヽニ

$$\chi_1(\alpha) = \prod_x \chi_{1x}(\alpha) \cdot \chi_{\mathfrak{q}}(\alpha)$$

$$(\alpha \text{ prim zu } \mathfrak{q}).$$

Ideal $\mathfrak{a}$ が $\prod_x \mathfrak{f}_{1x} \cdot \mathfrak{q}$ ニ素ナ時

$$\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{r}_1^{x_1} \cdot \mathfrak{b}^{n_1}(\alpha)$$

ナラバ

$$\chi_1(\mathfrak{a}) = \chi_1(\alpha)$$

ト置イテ mod $\prod_x \mathfrak{f}_{1x} \cdot \mathfrak{q}$ erklärbar ナ Idealgruppe ヲ導入スルト之ノ階級体 Z_1 ニ對シテ

$$\chi_1(\mathfrak{a}) = \left(\frac{Z_1/k}{\mathfrak{a}}\right)$$

$$\chi_{1x}(\alpha) = \left(\frac{\alpha, Z_1}{\mathfrak{p}_x}\right)$$

又 $\chi_1(\zeta_1)$ ハ $\chi_1(\eta_1)$ ノベキデアルカラ勿論 1 ニ等シイ。
故ニ條件 c) ヲ考ヘニ入レルト

$$\chi_1(\zeta_1) = \prod_x \chi_{1x}(\zeta_1) \cdot \chi_{\mathfrak{q}}(\zeta_1) = \chi_{\mathfrak{q}}(\zeta_1)$$

故ニ

$$\zeta_1 \underset{(n_1)}{\equiv} 1 \quad mod \ \mathfrak{q}$$

ソノ他ノ條件モ満足セラレテ居ルコトハ容易ニ見ラレル。

(B)　$k=2$ ノ場合

定理ノ條件　1.—5. ガコノ時ハ少シタルサクナッテ來ル。$\mu_2 \geqq m_2$ ノ場合ガ取扱ヒ易イカラ先ヅコノ場合カラ片付ケルコトニスル。

(B)$_1$　$\mu_2 \geqq m_2$

$$\eta_2^x \prod \varepsilon^y \prod \rho_2^z \prod \pi_{2x}^{u_x} \underset{(n_2)}{=} 1 \quad in \ k$$

ナラバ簡單ナ考察ニヨッテ

$$x \equiv y \equiv z \equiv u_k \equiv 0 \quad mod \ n_2$$

從ッテヨク知ラレタ Kummer ノ Körper ノ理論カラ

$$k(\sqrt[n_2]{\eta_2}),\ k(\sqrt[n_2]{\varepsilon}),\ k(\sqrt[n_2]{\rho_2}),\ k(\sqrt[n_2]{\pi_{2x}})$$

ハ基礎体 k ニ對シテ unabhängig トナル。

(A)$_1$ step デ補助ニトッタ $\mathfrak{q}$ ハ Z_1 デ完全分岐デ上ノ体ノ中デハ非分岐デアルカラ

$$Z_1 \frown k(\sqrt[n_2]{\eta_2},\ \sqrt[n_2]{\varepsilon},\ \sqrt[n_2]{\rho_2},\ \sqrt[n_2]{\pi_{2x}}) = k$$

從ッテ Tschebotaräw ノ定理カラ Z_1 デ完全ニ分解スル一次ノ Primideal $\mathfrak{q}'$ ヲトリ

(1)　$\prod_x \chi_{2x}(\alpha) \cdot \chi_{\mathfrak{q}'}(\alpha) = 1$

　　$(\alpha = \eta_2,\ \varepsilon,\ \rho_2,\ \pi_{2x})$

ナラシメルコトガ出來ル。（$\chi_{\mathfrak{a}'}$ ハ前ト類似ニ値域ガ $\mathfrak{a}_2$ ナル Charakter）従ッテ Grunwald ノ構成法デ

$$\chi_{2x}(\alpha)=\left(\frac{\alpha,\,K'}{\mathfrak{p}_x}\right)$$

ノヤウナ体 K′ ヲ作クレル．コノ体ニ関シテ Normenrestsymbol ノ Produktformel ヲ書クト

$$\prod_x \chi_{2x}(\alpha)\cdot\left(\frac{\alpha,\,K'}{\mathfrak{a}'}\right)\cdot\prod_{\mathfrak{p}'}\left(\frac{\alpha,\,K'}{\mathfrak{p}'}\right)=1$$

$$(\alpha=\eta_2,\ \varepsilon,\ \rho_2,\ \pi_{2x},\ \overline{W}_{12},\ \overline{W}')$$

但シ

$$\mathfrak{a}_1=\prod \mathfrak{N}_{12}^{q_{12}}\,\mathfrak{c}_{12}^{n_2}\,(\overline{W}_{12})$$

$$\mathfrak{a}'=\prod \mathfrak{N}_2^{q_1}\,\mathfrak{c}'^{\,n_2}(\overline{W}')$$

$\mathfrak{p}'$ ハ $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{a}'$ トコトナリ上ニ述ベタ α ニ對シテ少クモ一ツ $\left(\frac{\alpha,\,K'}{\mathfrak{p}'}\right)\neq 1$ トナル如キスベテノ Primideal ヲ動クモノトスル。

一般ニ α ガ $\mathfrak{a}'$ ト prim ナラ

$$\chi_{\mathfrak{a}'}(\alpha)=\left(\frac{\alpha,\,K'}{\mathfrak{a}'}\right)$$

ハ定義カラ出ル．従ッテ

$$\overline{\chi}_{\mathfrak{a}'}(\alpha)=\left(\frac{\alpha,\,K'}{\mathfrak{a}'}\right)$$

ハ $\chi_{\mathfrak{a}'}$ ノ Fortsetzung デアル。

後、僅カデ証明ガ終ルノデスガ今迄ノ原稿ト頁数ヲ揃ヘル都合上半端ナ所デ切ツテ置キマス。

昭和十一年度1月—6月分ノ會費金貳圓

也ヲ至急御拂込ミ下サイ。

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室　　清水辰次郎

振替口座番號　　大阪一七七四三番